

渋滞解消へ向けた 時間遅れをもつBurgers 方程式の数学的な基礎研究

数理物質系

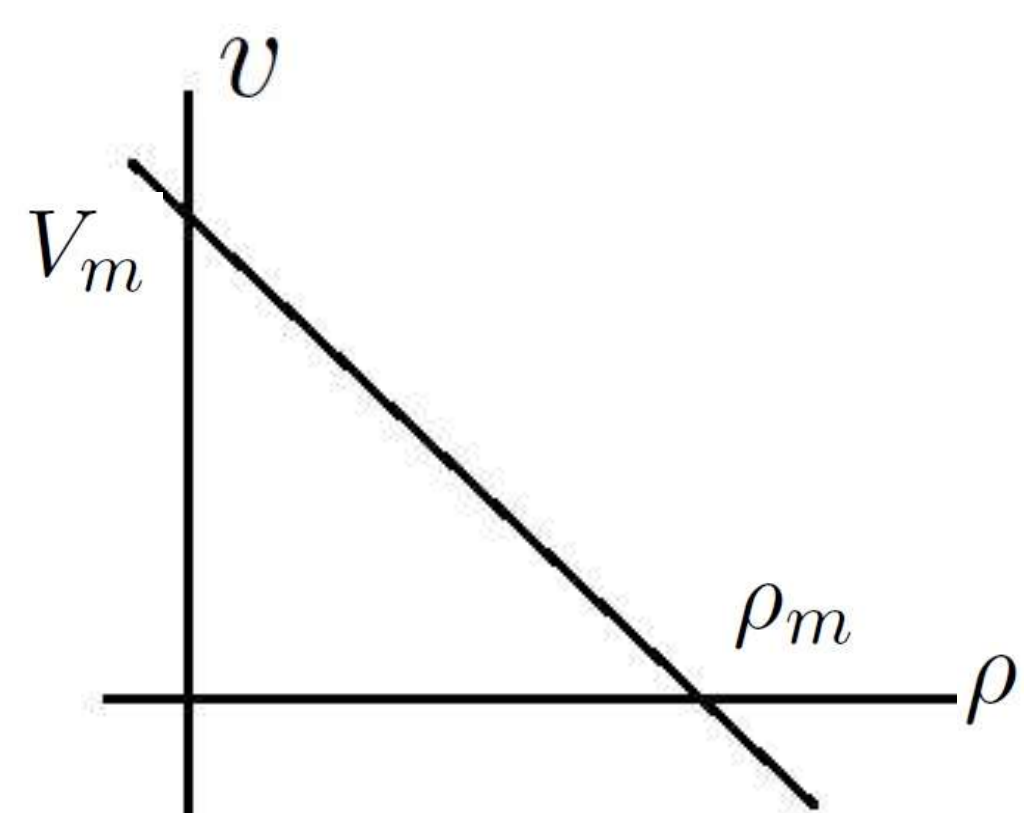
講師 久保 隆徹

交通流(渋滞)の数学的なモデルであるBurgers方程式に対して運転手の反応遅れによる効果を導入した新しいモデルを提案し、そのモデルに関して数学的な研究を行った。



渋滞をしている道ではある区間から車が出ればその区間には同数の車が入ると考えられ、車の量に関する保存則が成り立つと考えられる。すなわち、 ρ を車の密度、 q を車の流量とすると次の保存則が成り立つと考えられる:

$$\partial_t \rho + \partial_x q = 0$$



車の流量 q は車の密度 ρ と車の速度 v を用いて $q = \rho v$ と書ける。また、Greenshieldの観測結果から V_m を車の最高速度、 ρ_m を車の最高密度とすると、右のように仮定できる:

$$v = V_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right)$$

車の前の情報から運転手は車の速度を変化させるので、以下のように項を追加する:

$$v = V_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) - \frac{\nu}{\rho} \partial_x \rho$$

現実の渋滞では、運転手は前の車の影響によりアクセルやブレーキを踏む。その反応に関する時間遅れを含むように以下のように修正する:

$$v = V_m \left(1 - \frac{\rho(t - \tau)}{\rho_m} \right) - \frac{\nu}{\rho} \partial_x \rho$$

以上のことから次の時間遅れを含むBurgers方程式が得られる:

$$\partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + V_m \partial_x \left\{ \rho \left(1 - \frac{\rho(t - \tau)}{\rho_m} \right) \right\} = 0$$

この方程式に対して数学的に以下のことが示される:

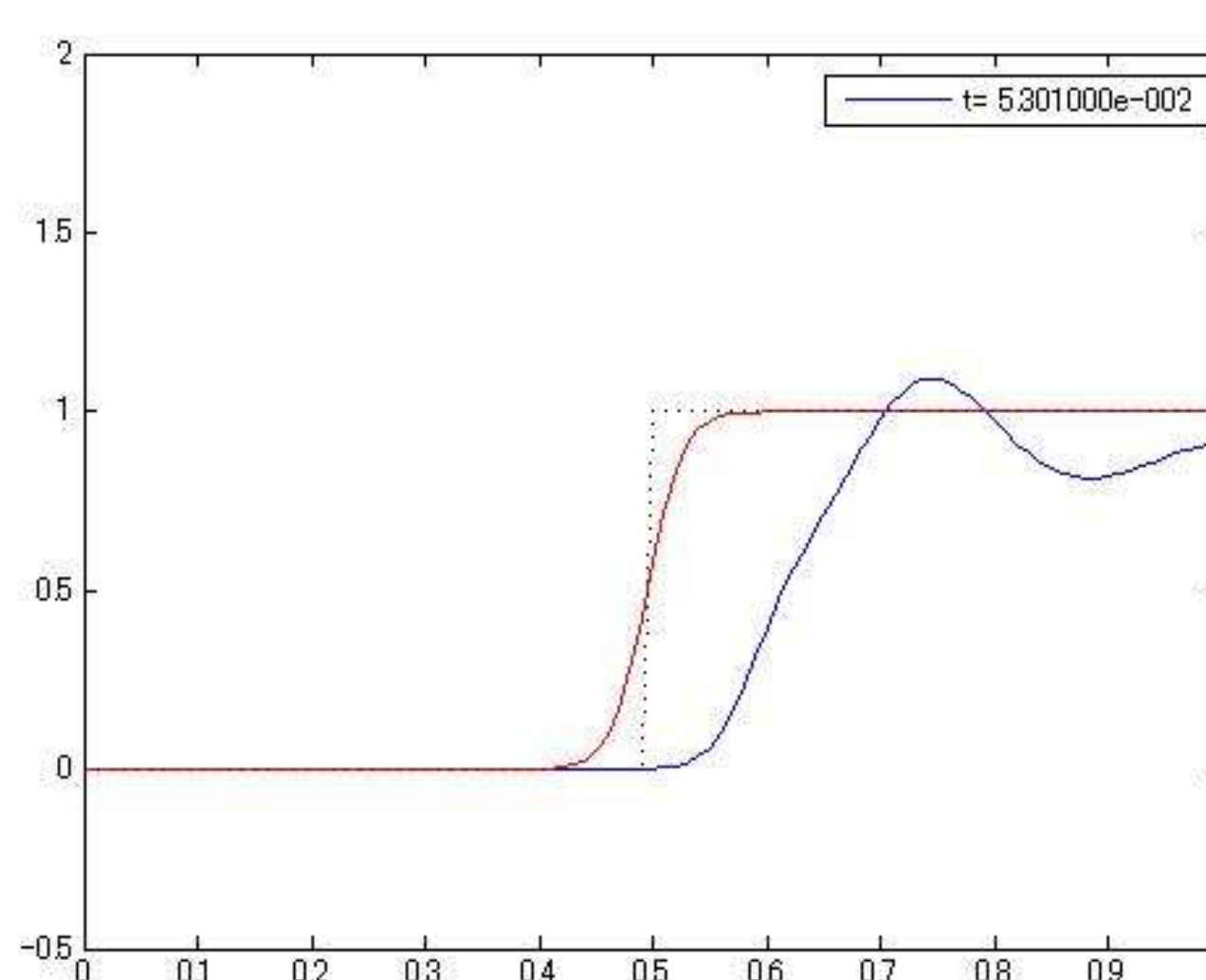
時間大域解が存在する。

これにより数値シミュレーションの解の基盤ができた。

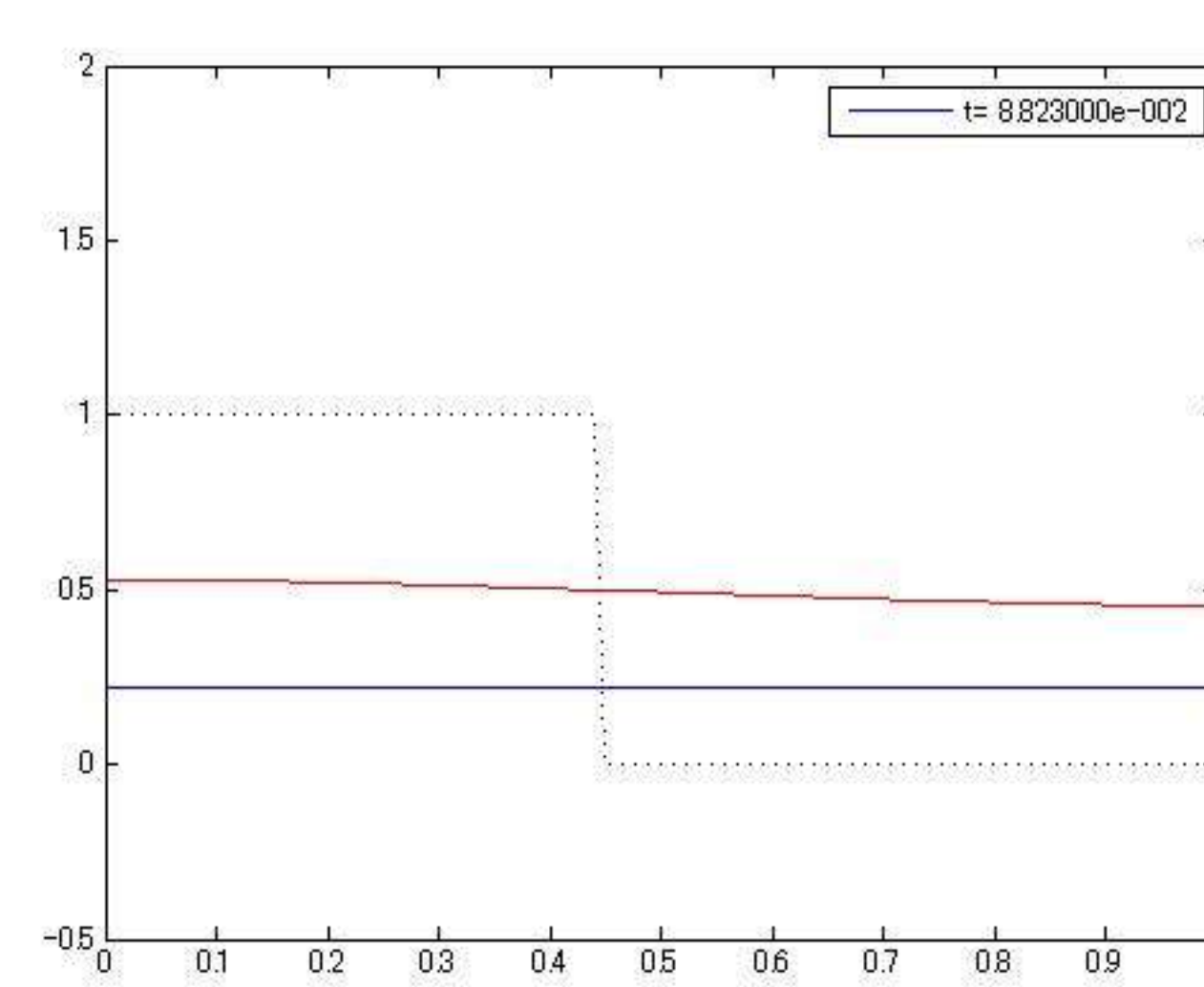
数値シミュレーションによる検証

区間 $[0, 1]$ においてNeumann境界条件 ($\partial_x \rho(0) = \partial_x \rho(1) = 0$) のもと、シミュレーションを行った。黒点線が初期状態、赤線がBurgers方程式の解、青線が時間遅れを考慮したBurgers方程式の解の様子を表す。

(1) 振動解が現れる。



(2) 全体の流量の違い



時間遅れがない場合は振動解は現れないが、時間遅れを考慮すると現れる。

流量について時間遅れを考慮した方が少ないことがある。

今後の研究課題

- 渋滞が解消されるための条件の解明 (安定性解析)
恒等的に0という関数は方程式の解(定常解)である。時間が経つにつれてその定常解に近づく(安定)のか遠ざかる(不安定)のかを解析することを(0定常解の)安定性解析という。その定常解が安定であるための条件として方程式に現れる係数と時間遅れパラメータとの関係を明らかにする。
- 渋滞が解消される時刻の解析
- モデルの再構築

Difference

通常のBurgers方程式では得られない解(振動解)が、時間遅れを考慮した方程式では数値的に検証される。振動解は現象として観測できるため、時間遅れを考慮することでより現実の問題に近いモデルとなっていることがわかる。